Rgomario

Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences
Tétouan

Année Univ : 08 –09
SMA / SMI

TD de Mécanique

Série n°3

Exercice 1 : Lundi

Un mobile, supposé ponctuel, décrit une courbe polaire dont l'équation, en coordonnées polaires (r, θ) est :

$$r = \frac{1}{2} r_0 (1 + \cos\theta)$$

où r_0 désigne une longueur donnée.

1°) a) Quelle est la trajectoire du mobile ?

Préciser les points d'intersection de cette trajectoire avec les axes cartésiens Ox et Oy.

b) Exprimer, en fonction de θ, l'abscisse curviligne S du mobile, comptée à partir du point A qui correspond à θ=0°.

Pour quel angle polaire a-t-on $S=r_0$?

On notera B la position correspondante du mobile.

2°) On choisira comme origine des temps, l'instant où le mobile passe en A, et on admet que la trajectoire est décrite avec une vitesse angulaire constante $\vec{\omega}$.

- Exprimer la vitesse linéaire du mobile :

a) en fonction du temps t **b)** en fonction du rayon polaire r.

3°) a) Déterminer les composantes **radiale** γ_r, **orthoradiale** γ_θ, et le module de l'accélération γ en fonction du temps.

b) En utilisant γ_r et γ_θ, déterminer la composante **normale** γ_n de l'accélération à l'instant t.

ETUSUP .com

c) En déduire le **rayon de courbure** ρ de la trajectoire en fonction de θ.

4°) Calculer numériquement la vitesse, l'accélération et le rayon de courbure de la trajectoire en A puis en B.

A.N. : $r_0 = 50$ cm, $\omega = 3{,}2$ rad/s.

<u>Exercice 2</u> : Samedi

Un point matériel A se déplace le long d'un cercle, de rayon R, qui tourne uniformément autour d'un diamètre vertical. On notera θ l'angle $(\overrightarrow{OZ}, \overrightarrow{OA})$ qui situe le point sur le cercle, et $\dot{\alpha} = \omega$ la vitesse angulaire du cercle.

1°) Exprimer, en fonction du paramètre θ, la vitesse et l'accélération de A **par rapport** à $R_1(O, X_1 Y_1 Z_1)$, dans la **base de Serret Frenet.**

2°) Ecrire, dans la **base de R_1**, la vitesse d'entrainement, l'accélération d'entrainement et l'accélération de coriolis.

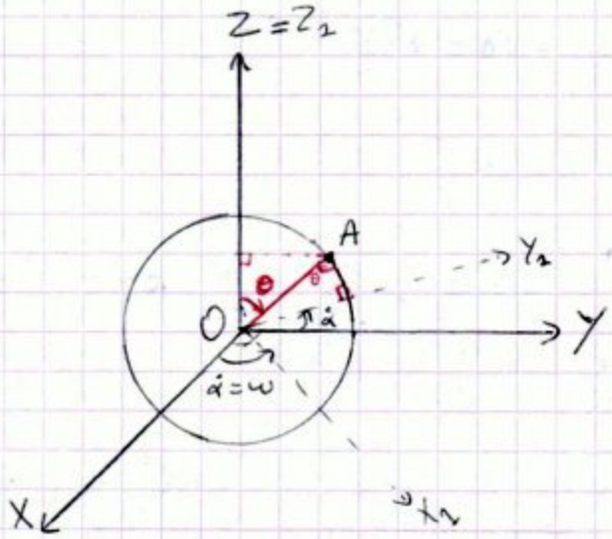
3°) En déduire la vitesse et l'accélération de A **par rapport à R**, exprimées dans la base de R_1.

4°) Retrouver ces résultats directement à partir des composantes de $\overrightarrow{OA}$ dans la base de R_1.

ETUSUP .com

SÉRIE n° 3

Exercice 2



(1) $\vec{OA} = R\cos\theta\,\vec{e}_{z_1} + R\sin\theta\,\vec{e}_{y_1}$

$\vec{V} = \frac{d\vec{OA}}{dt} = -R\frac{d\theta}{dt}\sin\theta\,\vec{e}_{z_1} + R\frac{d\theta}{dt}\cos\theta\,\vec{e}_{y_1}$

$\vec{V} = -R\dot{\theta}\sin\theta\,\vec{e}_{z_1} + R\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{e}_{y_1}$

$\vec{\gamma} = -R(\ddot{\theta}\sin\theta\,\vec{e}_{z_1} + \dot{\theta}^2\cos\theta\,\vec{e}_{z_1}) + R(\ddot{\theta}\cos\theta\,\vec{e}_{y_1} - \dot{\theta}^2\sin\theta\,\vec{e}_{y_1})$

$\vec{\gamma} = -R\ddot{\theta}\sin\theta\,\vec{e}_{z_1} - R\dot{\theta}^2\cos\theta\,\vec{e}_{z_1} + R\ddot{\theta}\cos\theta\,\vec{e}_{y_1} - R\dot{\theta}^2\sin\theta\,\vec{e}_{y_1}$

$\vec{\gamma} = R\ddot{\theta}(-\sin\theta\,\vec{e}_{z_1} + \cos\theta\,\vec{e}_{y_1}) + R\dot{\theta}^2(-\sin\theta\,\vec{e}_{y_1} - \cos\theta\,\vec{e}_{z_1})$

Dans R_1

- Dans la base de Frenet :

- $\vec{V} = \|\vec{V}\|\,\vec{T} = \frac{dS}{dt}\vec{T} = \sqrt{R^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta + R^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta}\;\vec{T}$

$\vec{V} = \sqrt{R^2\dot{\theta}^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta)}\,\vec{T} = \sqrt{R^2\dot{\theta}^2}\cdot 1 =$

$\boxed{\vec{V} = R\dot{\theta}\,\vec{T}}$

$\Rightarrow \vec{T} = \frac{\vec{V}}{\|\vec{V}\|} = \frac{-R\dot{\theta}\sin\theta\,\vec{e}_{z_1} + R\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{e}_{y_1}}{R\dot{\theta}} =$

$\boxed{\vec{T} = -\sin\theta\,\vec{e}_{z_1} + \cos\theta\,\vec{e}_{y_1}}$

- $\vec{\gamma} = R\ddot{\theta}\overbrace{(-\sin\theta\,\vec{e}_{z_1} + \cos\theta\,\vec{e}_{y_1})}^{\vec{T}} + R\dot{\theta}^2\overbrace{(-\sin\theta\,\vec{e}_{y_1} - \cos\theta\,\vec{e}_{z_1})}^{\vec{N}}$

- $\vec{N} = \frac{d\vec{T}}{d\theta} = \frac{-\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{e}_{z_1} - \dot{\theta}\sin\theta\,\vec{e}_{y_1}}{d\theta} = -\cos\theta\,\vec{e}_{z_1} - \sin\theta\,\vec{e}_{y_1}$

On déduit alors que : $\vec{\gamma} = R\ddot{\theta}\,\vec{T} + R\dot{\theta}^2\,\vec{N}$

ETUSUP .com

D'autre part, on a :

$$\vec{\gamma} = \gamma_T \vec{T} + \gamma_N \vec{N} = \frac{dV}{dt}\vec{T} + \frac{V^2}{\rho_{=R}}\vec{N}$$

$$\frac{dV}{dt} = \|\vec{\gamma}\| = \cancel{\sqrt{R\ddot{\theta}^2 \sin^2\theta}} = \sqrt{(R\ddot{\theta})^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) + (R\dot{\theta}^2)^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}$$

$$\|\vec{\gamma}\| = (R\ddot{\theta} + R\dot{\theta}^2)\vec{T} = R\ddot{\theta}\vec{T}$$

$$\|\vec{V}\|^2 = V^2 = \sqrt{R^2\dot{\theta}^2(\sin^2\theta + \cos\theta)}^2 = R^2\dot{\theta}^2$$

$$\frac{V^2}{R} = \frac{R^2\dot{\theta}^2}{R} = R\dot{\theta}^2$$

Donc : $\vec{\gamma} = (R\ddot{\theta} + R\dot{\theta}^2)\vec{T} + R\dot{\theta}^2\vec{N}$

$$\boxed{\vec{\gamma} = R\ddot{\theta}\vec{T} + R\dot{\theta}^2\vec{N}}$$

(2) $\vec{V}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\Big/_R + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM} = \cancel{\vec{\omega} \wedge (R}$

$$= \vec{\omega} \wedge (R\cos\theta\,\vec{e}_{z_1} + R\sin\theta\,\vec{e}_{y_1}) = \omega\vec{e}_z \wedge \ldots$$

$$\boxed{\vec{V}_e = -\dot{\alpha} R\sin\theta\,\vec{e}_{x_1}}$$

* $\vec{\gamma}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}\Big/_R + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OA} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OA})$ ($\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} = 0$, $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = 0$)

$$= \omega\vec{e}_z \wedge (\omega\vec{e}_z \wedge (R\cos\theta\,\vec{e}_{z_1} + R\sin\theta\,\vec{e}_{y_1}))$$

$$= \omega\vec{e}_z \wedge (-R\omega\sin\theta\,\vec{e}_{x_1})$$

$$\boxed{\vec{\gamma}_e = -R\omega^2\sin\theta\,\vec{e}_{y_1}}$$

* $\vec{\gamma}_c = 2\vec{\omega} \wedge \vec{V}_r = 2\omega\vec{e}_z \wedge (-R\dot{\theta}\sin\theta\,\vec{e}_{z_1} + R\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{e}_{y_1})$

$$= 0 - 2\omega R\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{e}_{x_1}$$

$$\boxed{\vec{\gamma}_c = -2R\omega\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{e}_{x_1}}$$

(3) * $\vec{V}(A)/_R = \overbrace{\vec{V}(A)/_{R_1}}^{\vec{V}_r} + \vec{V}_e = \vec{V}_r + \vec{V}_e$

$$= -R\dot{\theta}\sin\theta\,\vec{e}_{z_1} + R\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{e}_{y_1} - \overset{\omega}{\dot{\alpha}}R\sin\theta\,\vec{e}_{x_1}$$

* $\vec{\gamma}(A)/_R = \vec{\gamma}(A)/_{R_1} + \vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_c$

$$= -R\ddot{\theta}\sin\theta\,\vec{e}_{z_1} - R\dot{\theta}^2\cos\theta\,\vec{e}_{z_1} + R\ddot{\theta}\cos\theta\,\vec{e}_{y_1} - R\dot{\theta}^2\sin\theta\,\vec{e}_{y_1} \Rightarrow$$

$$- R\omega^2\sin\theta\,\vec{e}_{y_1} - 2R\omega\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{e}_{x_1}$$

$$\vec{\gamma}(A)/_R = -2R\omega \rightarrow$$

ETUSUP .com

$$\vec{\gamma}(A)/_R = -2R\omega\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{e}_{x_1} + \left(R\ddot{\theta}\cos\theta - R\dot{\theta}^2\sin\theta - R\omega^2\sin\theta\right)\vec{e}_{y_1}$$

$$* - \left(R\ddot{\theta}\sin\theta + R\dot{\theta}^2\cos\theta\right)\vec{e}_{z_1}$$

(4) Sachant que : $\vec{OA} = R\cos\theta\,\vec{e}_{z_1} + R\sin\theta\,\vec{e}_{y_1}$

Retrouvons $\vec{V}(A)/_R$ et $\vec{\gamma}(A)/_R$?

ETUSUP .com

ETUSUP.com

Programmation
Cours
Informatique
Optique
Chimie
Algébre
Corrigés
Mathématiques
Travaux Pratiques
Electricité
Physique
Résumés
Analyse
Diapo
Exercices
Livres
Contrôles Continus
Langues
MTU
Mécanique
Thermodynamique
Multimedia
Divers
Economie
Travaux Dirigés
Droit
Chimie Organique

et encore plus..